Temă 1 – Exercițiul 1

Funcție neliniară, nepătratică aleasă:

1. Dacă există derivate parțiale și sunt continue într-un punct, atunci funcția este diferențiabilă în acel punct.

Derivate parțiale: și sunt continue pe e diferențiabilă pe

(Sau, mai putem remarca simplu că f este sumă de funcții diferențiabile, deci concluzia reiese imediat.)

De asemenea, este convexă ddacă (matricea Hessiană) este pozitiv semidefinită și este dublu diferențiabilă (i.e. este diferențiabilă, dar și derivata este diferențiabilă).

Am demonstrat că este diferențiabilă și, folosind derivatele parțiale, se observă ușor că și derivata lui este tot diferențiabilă. Atunci, obținem următoarea matrice Hessiană:

Ca să demonstrăm faptul că H este pozitiv semidefinită, folosim criteriul lui Sylvester și obținem că toți determinanții sunt (toți sunt egali cu 0). Deci, este convexă.

Resurse: [Lecture 6 – Partial Derivatives and Differentiability](https://math.okstate.edu/people/binegar/4013-U98/4013-l06.pdf) (pag 4), [Sylvester’s Criterion](https://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester%27s_criterion), [Functions of Several Variables: Differentiability](http://people.ucalgary.ca/~aswish/MATH267L33_DiffLinAppr.pdf) (pag 6), [Economics – U.Toronto – Concave and convex functions of many variables](https://mjo.osborne.economics.utoronto.ca/index.php/tutorial/index/1/cvn/t), Seminar 1

b, c) Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local ale unei funcții diferențiabile se află printre punctele critice (staționare) ale acesteia.

Deci, mai întâi, aflăm toate punctele staționare ale funcției, apoi determinăm dacă sunt de minim / maxim. Dar, știm că funcția noastră este convexă, deci (conform Curs 3, slide 5), orice punct de extrem găsit este punct de minim global. Punctele staționare se găsesc folosind formula: , adică

, deci nu avem puncte staționare, implicit, nu avem puncte de extrem.

Vom lua totuși o funcție care să aibă puncte staționare:

Funcția este diferențiabilă, dar și convexă, prin aplicarea regulilor de mai sus (diferențiabilă pentru că este sumă de funcții diferențiabile / derivatele parțiale sunt continue pe & este convexă pentru că hessiana este pozitiv semidefinită, deoarece este o matrice diagonală \_ pe diagonală 6x, 6y, 6z \_ cu (x, y, z) ). Atunci, caut punctele staționare: , adică

Și, știm că funcția este convexă, deci (0, 0, 0) este punct de minim global.

Resurse: [Universitatea „Alexandru Ioan Cuza” Iași – Facultatea de Matematică – Curs (dr. Alina Gavriluț)](https://www.math.uaic.ro/~gavrilut/depozit/curs%20si%20seminar13.pdf) (pag 1), [Loughborough University – Workbook](https://learn.lboro.ac.uk/archive/olmp/olmp_resources/pages/workbooks_1_50_jan2008/Workbook18/18_3_stationary_points.pdf) (pag 5), [Relative Minimums And Maximums](https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calciii/relativeextrema.aspx), Seminar 1, Curs 3